

Problème

Un point matériel M , de masse m , accroché à un ressort, glisse à l'intérieur d'un tube, de faible section, dont une extrémité O est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. Ce tube a par rapport à \mathcal{R} un mouvement quelconque caractérisé par les paramètres θ et φ .

On appelle $\mathcal{R}_T(O, r, \theta, \varphi)$ le référentiel sphérique lié au tube T .

1°/ Calculer la vitesse et l'accélération relatives de M .

2°/ Calculer la vitesse d'entraînement, en déduire la vitesse absolue de M .

3°/ Calculer les accélérations d'entraînement et de coriolis, en déduire l'accélération absolue de M .

4°/ On se place dans la cas particulier où $\theta = \pi/2$ et $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{Cte}$). Le tube T est donc animé d'un mouvement de rotation uniforme, autour de l'axe Oz , dans le plan horizontal Oxy . On suppose que \mathcal{R} est galiléen, que le point matériel M glisse sans frottement à l'intérieur du tube et qu'il est soumis, en plus de son poids \vec{P} , à une force $\vec{F} = -K \cdot \overrightarrow{OM}$.

a) Que devient les expressions des vitesses $\vec{V}_r(M)$, $\vec{V}_e(\mathcal{R}_T/\mathcal{R})$, et $\vec{V}_a(M)$

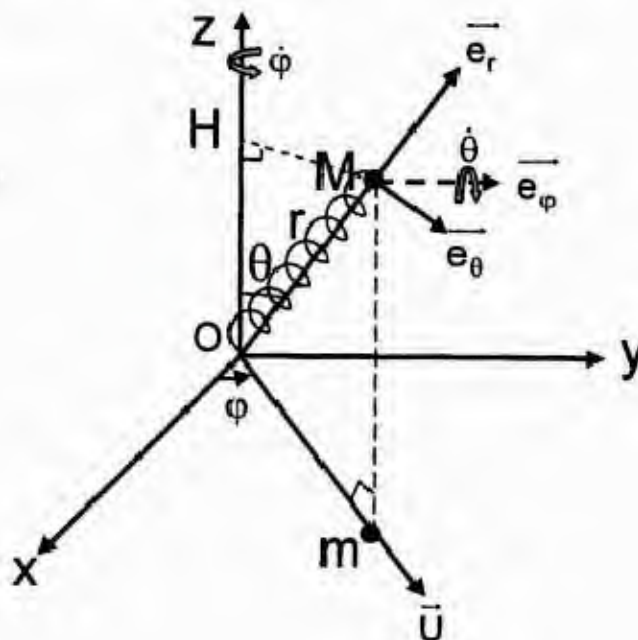
b) Que devient les expressions des accélérations $\vec{\gamma}_r(M)$, $\vec{\gamma}_e(\mathcal{R}_T/\mathcal{R})$, $\vec{\gamma}_c(\mathcal{R}_T/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}_a(M)$

c) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m selon que l'on se place dans le référentiel galiléen \mathcal{R} ou dans \mathcal{R}_T ?

d) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles du mouvement et les résoudre dans le cas où $\omega^2 < \frac{K}{m}$.

Remarque : les conditions initiales sont : à $t=0$, $r = a$ et $\dot{r} = 0$.

Solution :



$$1^\circ / \overline{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{V}_r = \frac{d\overline{OM}}{dt} / R_T = \dot{r} \vec{e}_r \text{ et } \vec{\gamma}_r = \ddot{r} \vec{e}_r$$

$$2^\circ / \vec{V}_e = \vec{\omega}(R_T / R) \wedge \overline{OM} = (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \overline{OM} = (\dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge r \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{V}_e = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi. \text{ D'où } \vec{V}_a = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$3^\circ / \vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM}) = [(\ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_r - (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\theta + \ddot{\theta} \vec{e}_\varphi] \wedge r \vec{e}_r$$

$$-r(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \vec{e}_r - r(\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta + r(\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_\varphi$$

$$\text{D'où } \vec{\gamma}_e = -r(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \vec{e}_r - r(\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + r(2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2\dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}_a = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + (2r\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta) \vec{e}_\varphi$$

$$4^\circ / \text{On se place dans la cas particulier où } \theta = \pi/2 \text{ et } \varphi = \omega t \text{ (}\omega = \text{Cte)} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \text{ et } \dot{\varphi} = \omega, \ddot{\varphi} = 0$$

$$a) \vec{V}_r = \dot{r} \vec{e}_r, \vec{V}_e = r\omega \vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{V}_a = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\varphi$$

$$b) \vec{\gamma}_r = \ddot{r} \vec{e}_r, \vec{\gamma}_e = -r\omega^2 \vec{e}_r, \vec{\gamma}_c = 2\dot{r}\omega \vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{\gamma}_a = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\omega) \vec{e}_\varphi$$

c) Dans \mathcal{R} , les forces sont :

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z = mg \vec{e}_\theta \text{ car } \theta = \pi/2, \vec{F} = -Kr \vec{e}_r, \vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\vec{R} \perp \vec{e}_r)$$

♣ Dans \mathcal{R}_T , il y a (en plus de \vec{P} , \vec{F} , et \vec{R}) les forces d'inertie :

$$* \vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mr\omega^2 \vec{e}_r \quad * \vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = -2m\dot{r}\omega \vec{e}_\varphi$$

$$d) \text{ PFD dans } \mathcal{R}_T \text{ est : } \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r = m\ddot{r} \vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} mr\omega^2 - Kr = m\ddot{r} \\ mg + R_\theta = 0 \\ R_\varphi - 2m\dot{r}\omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où l'équation différentielle : } \ddot{r} + \left(\frac{K}{m} - \omega^2 \right) r = \ddot{r} + \Omega^2 r = 0 \Rightarrow r = a \cos \left(\sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2} . t \right)$$

$$\text{Ainsi : } R_\theta = -mg \text{ et } R_\varphi = -2m\omega \sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2} . \sin \sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2} . t$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..

